## CONCOURS ESIGETEL - SESSION JUIN 1994

DUREE 4 HEURES

### Série Générale

# MATHEMATIQUES II

# ALGEBRE - GEOMETRIE

## EXERCICE DE GEOMETRIE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$(C\lambda)$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 2\lambda xy - 4x + 2y = 0$

1) Déterminer les points communs à toutes les courbes $(C\lambda)$

2) Réduire l'équation de $(C\lambda)$ et en donner sa nature lorsque $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$

3)

a) Dire pourquoi on peut définir au voisinage de 0 une fonction $\varphi$ telle que :
$\varphi(0) = -2$
$x^2 + \varphi(x)^2 + 2\lambda x\varphi(x) - 4x + 2\varphi(x) = 0$ pour x voisin de 0

b) Calculer $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. En déduire le rayon de courbure de $(C\lambda)$ au point A de coordonnées (0, -2)

c) Déterminer le vecteur normé tangent et le centre de courbure à $(C\lambda)$ au point A.

# PROBLEME D'ALGEBRE

E est un espace vectoriel euclidien de dimension n
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et y
$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E
L'application identique sur E est notée e
$\mathcal{S}(E)$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques
$\mathcal{S}^+(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid (\forall x \in E)\ (x|f(x)) \geq 0\}$
$\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$
$\mathcal{B}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \|f\| \leq 1\}$ est la boule unité de E
$f^*$ est l'endomorphisme adjoint de f, défini par : $\forall (x,y) \in E^2 \quad (f(x)|y) = (x|f^*(y))$
$\mathcal{C}(E) = \{f \in \mathcal{B}(E) \mid \mathrm{rg}\,(e - f^* \circ f) \leq 1\}$
$E_f = \{x \in E \mid \|f(x)\| = \|x\|\}$

1) u étant fixé dans E, on définit $f_u$ par : $(\forall x \in E) \quad f_u(x) = (u|x)\, u$

a) Montrer que $f_u \in \mathcal{S}^+(E)$

b) Donner le rang de $f_u$

c) Quelle est la nature de $f_u$ lorsque $\|u\| = 1$ ?

d) U étant la matrice unicolonne des coordonnées de u et M la matrice de $f_u$, montrer que $M = U\,({}^tU)$

On notera alors $f_u = u\,u^*$

2) $(u,v) \in E^2$. A quelles conditions a-t-on $u\,u^* = v\,v^*$ ?

3) $f \in \mathcal{S}(E)$

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\, a_i^*$

b) A quelles conditions portant sur les $\lambda_i$ a-t-on $f \in \mathcal{S}^+(E)$ ?

4) Pour $f \in \mathcal{S}(E)$ prouver l'équivalence suivante : $f = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ (x|f(x)) = 0$

5) Pour $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et $x \in E$ prouver l'équivalence suivante : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x|f(x)) = 0$

6) $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si il existe une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E telle que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i \, u_i^*$

7) $f \in \mathcal{L}(E)$

a) Prouver que $(\forall x \in E) \quad \|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\|$

b) Prouver que $(\forall x \in E) \quad \|f(x)\| \leq \|f^*\| \, \|x\|$

c) Etablir que $\|f\| = \|f^*\|$

8)

a) Montrer que : $f \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$

b) Montrer que : $f \in \mathcal{B}(E) \Leftrightarrow e - f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$

9) $f \in \mathcal{B}(E)$

a) Prouver l'équivalence $\|f\| = 1 \Leftrightarrow E_f \neq \{0\}$

b) Démontrer que $E_f = \operatorname{Ker}(e - f^* \circ f)$
Ecrire un résultat analogue pour $E_{f^*}$.

c) Démontrer que $f(E_f) = E_{f^*}$.
En déduire que $\dim(E_{f^*}) = \dim(E_f)$

10) $f \in \mathcal{B}(E)$
$F = \{x \in E \mid (\forall k \in N) \quad f^k(x) \in E_f\}$
G est l'orthogonal de F dans E

a) Démontrer que F est un sous espace vectoriel de E

b) Prouver que $f(F) = F$ et $f^*(F) = F$

c) Montrer que $f(G) \subset G$

11) $f \in \mathcal{L}(E)$
Démontrer que la condition $f \in \mathcal{C}(E)$ équivaut aux conditions suivantes :

i) $f^* \in \mathcal{C}(E)$

ii) $(\exists u \in E) \qquad e - f^* \circ f = u \, u^*$

iii) $(\exists u \in E) \; (\forall x \in E) \quad \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u|x)^2$